1) Uveďte alespoň dvě **řádově různě rostoucí** funkce f(n) takové, že $n^2 = O(f(n))$ a $f(n) = O(n^3)$.

2) Platí-li $f(n)=O(g_1(n))$ a $f(n)=O(g_2(n))$, znamená to, že $g_1(n)$ a $g_2(n)$ **rostou řádově stejně rychle**?

3) Je možné, aby pro **dvě funkce** $f(n) \neq g(n)$ platilo $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(f(n))$?

4) Která z funkcí $f(n) = n^{\sqrt{n}}$ a $g(n) = (\sqrt{n})^n$ roste asymptoticky rychleji ?

5) Dokažte, že v každém obyčejném grafu s n (≥ 2) uzly existují alespoň dva uzly stejného stupně.

6) Co je to **faktor** neorientovaného grafu ? Čím se liší dva různé faktory téhož grafu ?

7) Zvažte pravdivost tvrzení: Je-li graf G dán jako $G = G_1 \cup G_2$, pak platí $G_2 = G - G_1$.

8) Co je to **izomorfismus neorientovaných grafů** ?

9) Určete min. a max. délku kružnice v grafu se smyčkami, v multigrafu bez smyček a v obyč. grafu.

10) Co je to **souvislý graf** ? Zaručuje n hran v grafu s n uzly jeho **souvislost** ?

11) Co je to **komponenta** neorientovaného grafu ? Mohou mít **dvě komponenty neprázdný průnik** ?

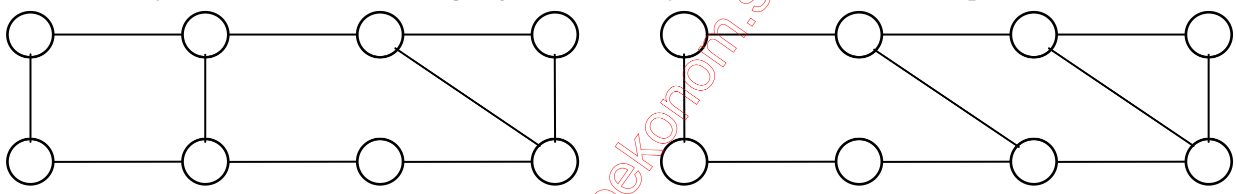
12) Mohou dvě komponenty neorientovaného grafu **incidovat se stejnou hranou** ?

13) Co je to **cesta** v neorientovaném grafu, čím se liší od **tahu** ?

14) Co je to **kružnice** v neorientovaném grafu ? Liší se nějak od **uzavřeného tahu** ?

15) Je možné, aby nějaký **tah** v obyčejném neorientovaném grafu obsahoval **více hran, než** kolik má tento graf **uzlů** ?

16) Pro následující dva neorientované grafy určete, zda jsou **izomorfní** nebo aspoň **homeomorfní**.



17) Nechť $G = \langle H,U,\rho \rangle$ je neorientovaný graf, $A \subseteq U$. Může nastat situace, že $\Gamma(A) \subset A$?

18) Je možné sestrojit obecný neorientovaný graf se **souborem stupňů** 1,1,1,2,2,3,4,4,5 ?

19) Je možné sestrojit **souvislý** neorientovaný **graf se souborem stupňů** 1,1,1,1,1,2,2,2,3 ?

20) Je možné pro libovolnou posloupnost přirozených čísel $n_1, n_2, ..., n_k$, sestrojit **obyčejný neorientovaný graf**, pro který představuje **soubor stupňů uzlů** ?

21) Formulujte nějakým vztahem s použitím matice **V** (resp. **A**) **podmínku pro souvislost** odpovídajícího neorientovaného grafu.

22) Co je to **silná komponenta** OG ? Mohou mít **dvě silné komponenty** OG **neprázdný průnik** ?

23) Mohou dvě silné komponenty orientovaného grafu **incidovat se stejnou hranou** ?

24) Existuje nějaký **silně souvislý** orientovaný graf, který je **acyklický** ?

25) Kolika různými způsoby lze provést **orientaci** neorientovaného grafu $G = \langle H,U,\rho \rangle$?

26) OG G' vznikl sjednocením OG G s opačně orientovaným grafem G^{-}. Bude graf G' **silně souvislý**?

27) Určete maximální počet hran obyčejného bichromatického grafu s deseti uzly.

28) Charakterizujte graf, který zbude po **odebrání všech silných komponent** z orientovaného grafu ?

29) Formulujte nutnou a postačující podmínku silné souvislosti OG pomocí jeho relace následování Γ .

30) Navrhněte postup pro **orientaci** libovolného NG tak, aby výsledný OG byl **zaručeně acyklický**.

31) NG je zadán následující maticí sousednosti **V** , resp. incidence **A**. Bez "nakreslení" grafu vytvořte matici **V, resp. A** takové jeho orientace, kterou bude **acyklický graf**. Postup popište a zdůvodněte.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|ccccc|} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{array}{|ccccccc|} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

32) Určete vztah mezi klikovostí a chromatickým číslem grafu.

33) Určete poloměr a průměr grafu s deseti uzly, jehož minimální dominující podmnožina obsahuje pouze 2 uzly a není nezávislá.

34) Charakterizujte **prostý acyklický graf** pomocí
a) jeho rozkladu na silné komponenty b) jeho kondenzace

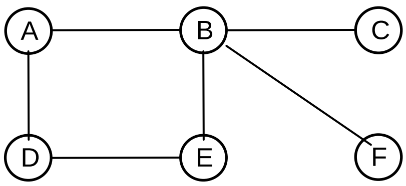
35) Charakterizujte **silně souvislý graf** pomocí
a) jeho rozkladu na silné komponenty b) jeho kondenzace

36) Obyčejný NG zadaný maticí sousednosti **V,** resp. maticí incidence **A** nějak orientujeme. Jak se změní matice **V,** resp. **A** ?

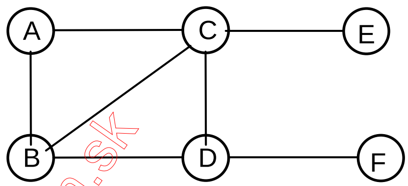
37) Uvažujte procházení bin. stromem, které zpracuje kořen, projde pravý podstrom a projde levý podstrom. Má toto procházení jednoduchý vztah k některému ze způsobů post-, in- a preorder?

38) Uveďte pořadí uzlů při prohledávání grafů G_1, a G_2 . Sousedi uzlu jsou řazeni abecedně.
a) uvažujte prohledávání do šířky b) uvažujte prohledávání do hloubky

G_1



G_2



39) Určete 3 různé minimální dominující a současně nezávislé podmnožiny uzlů grafu G_1, resp. G_2.

40) Máme NG, jehož **každý uzel leží v nějaké kružnici** - je možné orientovat jeho hrany tak, aby byl výsledný OG silně souvislý ?

41) Jak se z matice **A** orientovaného grafu pozná, že je to **orientovaný Eulerův graf** ?

42) Navrhněte postup, pomocí něhož lze orientovat libovolný neorientovaný Eulerův graf tak, aby vznikl orientovaný Eulerův graf.

43) Kolik hran je nutné odebrat ze souvislého grafu $G = <H,U,\rho>$, aby zbyla jeho kostra ?

44) Určete minimální a maximální počet **listů stromu** o n (≥ 2) uzlech.

45) Může sjednocením dvou různých koster téhož NG vzniknout opět kostra tohoto grafu ?

46) Lze sestrojit **strom**, který **není planární** ?

47) Určete tvar grafu s **minimálním počtem hran**, který má 20 uzlů, poloměr 1 a chromatické číslo 3.

48) Určete příklad grafu, který má 20 uzlů, **minimální poloměr** a chromatické číslo 4.

49) Co je to **vzdálenost uzlů** v souvislém (neohodnoceném) neorientovaném grafu ? Jaká je výpočetní složitost výpočtu všech vzdáleností v takovém grafu ?

50) Uveďte alespoň dva hlavní rozdíly mezi Dijkstrovým a Bellmanovým-Fordovým algoritmem (neuvádějte popis těchto algoritmů).

51) Kdy je vhodné použít pro určení všech vzdáleností v grafu Johnsonova algoritmu ?

52) Co je to **minimální kostra** grafu ? Liší se od kostry minimálních cest od vhodně zvoleného uzlu ?

53) Jaký je hlavní rozdíl mezi **hladovými** algoritmy a algoritmy **dynamického programování** ?

54) Co rozumíme tokem v síti $S = \langle G, q, s, t\rangle$?

55) Co je to **algoritmus uspořádaného výběru** ?

56) Co je to **konzistentní heuristická funkce** ?

57) Co znamená, že hledání s heuristickou funkcí h_1 je **více informované** než s funkcí h_2 ?

58) Uveďte alespoň 3 varianty alogoritmů heuristického hledání.

59) Charakterizujte graf, jehož každý hranový řez je tvořen právě jednou hranou.

60) Určete strukturu obyčejného OG o n uzlech, který lze topologicky uspořádat :
a) jediným způsobem, b) $(n-1)!$ způsoby, c) $k!.(n-k-1)!$ způsoby pro dané k $(2 \leq k \leq n-2)$

61) Jak se může změnit počet silných komponent OG, přidáme-li do něj jednu hranu ?

62) Dokažte, že existuje minimální kostra grafu obsahující hranu h s minimálním ohodnocením $w(h)$.

63) Nechť T je minimální kostra grafu G. Jak se snadno získá min. kostra grafu, který vznikne z G přidáním nového uzlu a několika hran, které jej připojí k uzlům původního grafu?

64) Obyčejný NG $G = \langle H,U \rangle$ má 10 uzlů a 3 komponenty. Určete dolní a horní mez pro počet hran.

65) Určete minimální a maximální součet stupňů uzlů neorientovaného stromu o n uzlech.

66) List papíru rozstřihnete na 3 kusy, jeden z kusů vezmete a opět rozstřihnete na 3 kusy, atd. Když skončíte, co lze říci o výsledném počtu kousků?

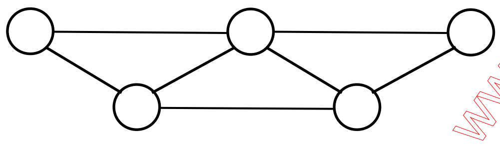
---

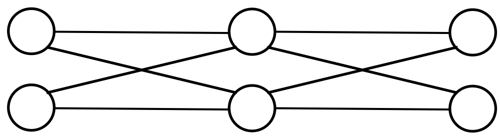
67) Kolik různých faktorů má diskrétní graf D_n a kolik úplný graf K_n o n uzlech ?

68) Čím je **omezena délka** (otevřené) **cesty, tahu a kružnice** v neorientovaném grafu $G = \langle H,U,\rho \rangle$?

69) Navrhněte postup, jímž se pro libovolnou posloupnost kladných celých čísel $n_1, n_2, ..., n_k$, se sudým součtem sestrojí **neorientovaný** (ne nutně obyčejný!) **graf**, s tímto **souborem stupňů .**

70) Pro daný neorientovaný graf zjistěte, zda zadaná matice může být jeho
a) maticí **incidence A** b) maticí **sousednosti V**





$$\mathbf{A}_1 \; \begin{array}{|ccccccc|} 0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1 \end{array} \qquad \mathbf{V}_1 \; \begin{array}{|ccccc|} 0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \end{array}$$

$$\mathbf{A}_2 \; \begin{array}{|cccccccc|} 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1 \\ 1&0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{array} \qquad \mathbf{V}_2 \; \begin{array}{|cccccc|} 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0 \\ 1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0 \end{array}$$

71) Bez "kreslení" grafu určeného maticí sousednosti $\mathbf{V}_1$ ($\mathbf{V}_2$) z předchozího příkladu spočtěte, kolik různých sledů délky 3 je mezi dvojicemi uzlů 1 - 4 a 2 - 3 ().

72) Je možné orientovat úplný neorientovaný graf očtyřech uzlech K_4 **alespoň 20-ti** různými způsoby tak, že vzniklý graf je acyklický?

73) Je OG vzniklý **sjednocením hranově disjunktních cyklů** vždy silně souvislý ? Pokud není, formulujte nutnou a postačující podmínku.

74) OG má m (obyčejných) **komponent** a n **silných komponent**. Jaký bude vztah čísel m a n ? Jaký bude maximální počet (orientovaných) hran v jeho kondenzaci ?

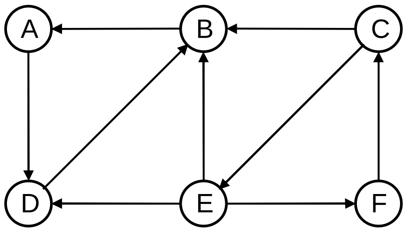
75) Máme OG, pro jehož každý uzel platí $\delta^+(u) \geq 1$, $\delta^-(u) \geq 1$. Je možné tvrdit, že každým uzlem tohoto grafu prochází nějaký cyklus ? Jak to bude v případě $\delta^+(u) = 1$, $\delta^-(u) = 1$?

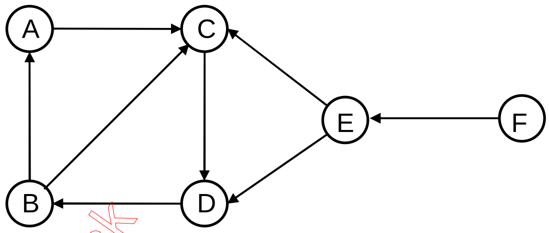
76) OG je zadán následující maticí sousednosti **V-** viz další strana. Určete bez "nakreslení" grafu, kolik **různých orientovaných spojení délky 3** je mezi všemi jeho dvojicemi uzlů a zda je **silně souvislý**. Popište svůj postup.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{|ccccc|} \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

77) Popište postup, kterým lze určit algebraickými prostředky z matice **A** neorientovaného grafu (třeba i nepříliš efektivně), zda lze tento graf nakreslit **jediným uzavřeným tahem**.

78) Uveďte pořadí uzlů a typ hran (stromová, zpětná, dopředná, příčná) při prohledávání orientovaného grafu do hloubky. Následníci uzlu jsou řazeni abecedně, nové uzly vybírejte rovněž abecedně.





79) Dokažte, že souvislý OG, jehož **každý uzel má stejný vstupní stupeň jako má výstupní stupeň**, je silně souvislý.

80) Určete strukturu (tj. jak vypadá) OG s *n* uzly, který **je symetrický a tranzitivní**, ale **není reflexivní**.

81) Určete asymptotickou výpočetní složitost výpočtu stupňů všech uzlů grafu $G = \langle H,U,\rho \rangle$
a) z matice incidence **A** b) z matice sousednosti **V** c) ze spojové reprezentace

82) Určete **maximální a minimální počet uzlů stromu** s poloměrem 4, jehož uzly mají stupeň nejvýše rovný 3 .

83) Nechť *G* je souvislý **orientovaný Eulerův graf**. Je *G* také **silně souvislý** ?

84) Zvažte pravdivost tvrzení : obsahuje-li každý řádek matice **A** orientovaného grafu právě jednu 1 a jednu -1, pak tento graf tvoří **jediný cyklus** ? Pokud není pravdivé, vyslovte nějaký lepší závěr.

85) Jak se může změnit **nezávislost, klikovost, chromatické číslo, dominance** vypuštěním jedné hrany?

86) Kolik hran je třeba **minimálně vypustit z úplného grafu** o 10-ti uzlech, aby měl výsledný graf chromatické číslo 4 (resp. 3) ?

87) Nalezněte příklad grafu, jehož **minimální dominující podmnožina uzlů není nezávislá**. Je možné nalézt **maximální nezávislou množinu uzlů, která není dominující** ?

88) Souvislý neorientovaný graf má **právě 4 uzly lichého stupně**. Dokažte, že pak existují nejméně dvě **jeho** různá **pokrytí.**

89) Potvrďte nebo vyvraťte : Při procházení binárního stromu libovolným ze způsobů preorder, inorder, postorder se listy stromu zpracují ve stejném relativním pořadí.

90) Dokažte, že každý hranový řez má s každou kostrou souvislého grafu společnou aspoň jednu hranu.

91) Pro uzel *u* v OG platí $\delta^+(u) \geq 1, \delta^-(u) \geq 1.$, a přesto skončil při prohledávání do hloubky jako jediný uzel jednoho z DFS stromů. Zdůvodněte ukázkou grafu, v němž se to mohlo stát.

92) Uveďte všechny možné případy seřazení hodnot chromatické číslo, dominance, nezávislost grafu spolu s příklady grafů, v nichž dané pořadí nastává. Uvažujte pouze navzájem různé hodnoty.